• Δίνεται συνάρτηση

$$f(x) = e^{x} \cdot (ημx - συνx - 2x + 2) \, , \, x \in \mathbb{R}$$

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία-ακρότατα

ii) ΝΔΟ

$$\sqrt[4]{e^{\pi}} < \frac{2}{4-\pi}$$

iii) Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$ημx - συνx - 2x + 2 \le e^{-\lambda^2 - x} \, , \, \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) $f'(x) = e^{x} \cdot (ημx - συνx - 2x + 2) + e^{x}(συνx + ημx - 2) =$

$= 2e^{x} ημx - 2e^{x} \cdot x = 2e^{x}(ημx - x) \, , \, \forall x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση $\varphi(x) = 2e^{x} > 0$

Για την $g(x) = ημx - x \, , \, \forall x \in \mathbb{R}$ πρέπει να εξεταστεί.

Είναι γνωστό ότι: $|ημx| \le |x| \, , \, \forall x \in \mathbb{R}$

Δηλαδή, $-|x| \le ημx \le |x| \, , \, \forall x \in \mathbb{R}$

- $x = 0$, ισχύει η ισότητα
- $x > 0$, $ημx < x$
- $x < 0$, $ημx > x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	
f'		↗		↘	
			max $f(0)=1$		

Ενώ $f \nearrow : (-\infty, 0]$ και $f \searrow : [0, +\infty)$.

με μέγιστο το $f(0) = 1$

ii) Αφού η f έχει ολ. μέγιστο το $f(0) = 1$

τότε $f(x_1) < f(0) \, , \, \forall x_1 \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $f(\frac{\pi}{4}) < f(0) \Rightarrow e^{\pi/4} \cdot (-\frac{\pi}{2} + 2) < 1 \Rightarrow e^{\pi/4} < \frac{2}{4-\pi}$.

iii) $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - 2x + 2 \leq e^{-\lambda^2 - x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - 2x + 2 \leq e^{-\lambda^2} \cdot e^{-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x} \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - 2x + 2) \leq e^{-\lambda^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Δηλαδή $f(x) \leq e^{-\lambda^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Δηλαδή $\max f(x) \leq e^{-\lambda^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0) \leq e^{-\lambda^2} \Rightarrow 1 \leq e^{-\lambda^2} \Rightarrow -\lambda^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2 \leq 0 \xrightarrow{\text{Αναγκαστικά}} \lambda = 0$

[Είναι προφανές ότι $\lambda = 0$ διότι δεν υπάρχει καμία άλλη τιμή που να ξεπερνά τη μέγιστη της f εκτός αν είναι η ίδια η μέγιστη τιμή της.]